线性变换(矩阵) 特征值, 特征向量

几何意义: 伸缩率　不变的方向

如何求解.

相似不变量: 特征值, 特征多项式, tr, det.

定理: $A=(a_{ij})\in\mathbb{C}^{n\times n}$. $\lambda_1,\cdots,\lambda_n$ 为 A 的 n 个特征值(可能有重复的) 则

1) $tr(A)=\sum_{i=1}^{n}\lambda_i$

2) $\det(A)=\lambda_1\lambda_2\cdots\lambda_n$

推论: n 阶方阵可逆 $\Leftrightarrow$ n 个特征值都不为零

例: 设 n 阶方阵 A 的特征值为 $\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_n$. 求 $I+A$ 的特征值与行列式

换成 $f(A)$ 呢?

解 $P_{I+A}(\lambda)=\det(\lambda I-(I+A))=\det((\lambda-1)I-A)$

$=P_A(\lambda-1)=((\lambda-1)-\lambda_1)((\lambda-1)-\lambda_2)\cdots((\lambda-1)-\lambda_n)$

$=(\lambda-(1+\lambda_1))(\lambda-(1+\lambda_2))\cdots(\lambda-(1+\lambda_n))$

$\det(I+A)=\prod_{i=1}^{n}(1+\lambda_i)$. □

例: 若 $A=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&0&1\\0&1&x\end{pmatrix}$ 与 $B=\begin{pmatrix}y&0&0\\0&-1&1\\0&0&1\end{pmatrix}$ 相似, 求 x,y.

解: $tr(A)=tr(B)\Rightarrow 1+x=y$

$\det A=\det B\Rightarrow -1=-y$

$\Rightarrow\begin{cases}x=0\\y=1\end{cases}$

或 $P_A(\lambda)=P_B(\lambda)\Rightarrow(\lambda-1)(\lambda(\lambda-x)-1)=(\lambda-y)(\lambda+1)(\lambda-1)\Rightarrow\begin{cases}x=0\\y=1\end{cases}$

§ 矩阵的相似对角化

为了研究哪些线性变换由伸缩给出的，我们引入了特征值与特征向量。

相似于对角矩阵的方阵称为可对角化的。也称相应的线性变换为可对角化的。

问题：如何判断一个线性变换是否可对角化？

注：不是所有的线性变换和矩阵都可对角化。

例：$A=\begin{pmatrix}2&1\\0&2\end{pmatrix}$ 不可对角化。

否则 $A=T\begin{pmatrix}2&\\&2\end{pmatrix}T^{-1}=2TT^{-1}=2I_2$ ↯.

§ 可对角化的充要条件.

$A=T\begin{pmatrix}\lambda_1&&\\&\ddots&\\&&\lambda_n\end{pmatrix}T^{-1}$. 记 $T=(\eta_1,\cdots,\eta_n)$. 则

$\eta_1,\cdots,\eta_n$ 线性无关，且 $A\eta_i=\lambda_i\eta_i$

(因为 $A(\eta_1\cdots\eta_n)=AT=T\begin{pmatrix}\lambda_1&&\\&\ddots&\\&&\lambda_n\end{pmatrix}=(\eta_1,\cdots,\eta_n)\begin{pmatrix}\lambda_1&&\\&\ddots&\\&&\lambda_n\end{pmatrix}=(\lambda_1\eta_1,\cdots,\lambda_n\eta_n)$)

定理：$A\in F^{n\times n}$ 可对角化 $\Leftrightarrow$ A 有 n 个线性无关的特征向量.

证明：若 $\eta_1\cdots\eta_n$ 线性无关，且 $A\eta_i=\lambda_i\eta_i$. 记 $T=(\eta_1\cdots\eta_n)$.

$\eta_1\cdots\eta_n$ 线性无关 $\Rightarrow$ T 可逆

$A\eta_i=\lambda_i\eta_i \Rightarrow A(\eta_1\cdots\eta_n)=(\eta_1\cdots\eta_n)\begin{pmatrix}\lambda_1&&\\&\ddots&\\&&\lambda_n\end{pmatrix}$

$\Rightarrow AT=T\,\mathrm{diag}(\lambda_1\cdots\lambda_n) \Rightarrow A\sim \mathrm{diag}(\lambda_1\cdots\lambda_n)$.

有没有简单一点的办法来判断呢？

用相似不变量来判断.（简单一些，有时间不需要求特征向量）

引理：$A\in F^{n\times n}$，属于 A 的不同特征值的特征向量线性无关.

即若 $A\vec{x_i}=\lambda_i\vec{x_i}$ ($\vec{x_i}\neq 0$, $1\le i\le k$)，则 $\vec{x_1},\cdots\vec{x_k}$ 线性无关.

证明：设 $\mu_1\vec{x_1}+\mu_2\vec{x_2}+\cdots+\mu_k\vec{x_k}=0$. 则

$$
\begin{aligned}
0 &= A^i(\mu_1\vec{x_1}+\mu_2\vec{x_2}+\cdots+\mu_k\vec{x_k})\\
&=\mu_1A^i\vec{x_1}+\mu_2A^i\vec{x_2}+\cdots+\mu_kA^i\vec{x_k}\\
&=\lambda_1^i(\mu_1\vec{x_1})+\lambda_2^i(\mu_2\vec{x_2})+\cdots+\lambda_k^i(\mu_k\vec{x_k})\\
&=(\mu_1\vec{x_1},\cdots,\mu_k\vec{x_k})\begin{pmatrix}\lambda_1^i\\ \vdots\\ \lambda_k^i\end{pmatrix} \qquad \forall i\ge 0.
\end{aligned}
$$

$$\Rightarrow (\mu_1\vec{x_1},\cdots,\mu_k\vec{x_k})\underbrace{\begin{pmatrix}1&\lambda_1&\cdots&\lambda_1^{k-1}\\1&\lambda_2&\cdots&\lambda_2^{k-1}\\ \cdots&\cdots&\cdots&\cdots\\1&\lambda_k&\cdots&\lambda_k^{k-1}\end{pmatrix}}_{\text{可逆！}}=0$$

$$\Rightarrow (\mu_1\vec{x_1},\cdots,\mu_k\vec{x_k})=0$$

$$\Rightarrow \mu_i\vec{x_i}=0 \quad \forall i=1,\cdots,k$$

$$\Rightarrow \mu_1=\cdots=\mu_k=0$$

□

推论：若 $A\in F^{n\times n}$ 有 n 个两两不同的特征值，则 A 可对角化.

有重根咋办？

*§ 重数（也可用特征值重数来判定是否可对角化）

$A\in\mathbb{C}^{n\times n}$. $P_A(\lambda)=(\lambda-\lambda_1)^{n_1}(\lambda-\lambda_2)^{n_2}\cdots(\lambda-\lambda_s)^{n_s}$

$n_i=\lambda_i$ 的代数重数

$m_i:=\dim_{\mathbb{C}}V_A(\lambda_i)$ 称为 λ_i 的几何重数.

定理：1) $1\le$ 几何重数 $\le$ 代数重数（即 $m_i \le n_i \ \forall i=1,\cdots,s$）

2) A 可对角化 $\Leftrightarrow$ 每个特征值的几何重数与代数重数相等

例：$A=\begin{pmatrix} 0 & 0 & x \\ 1 & 1 & y \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ 可对角化 $\Leftrightarrow$ x,y ??

解：$P_A(\lambda)=\begin{vmatrix} \lambda & 0 & -x \\ -1 & \lambda-1 & -y \\ -1 & 0 & \lambda \end{vmatrix} = \lambda^2(\lambda-1)-(\lambda-1)x=(\lambda-1)(\lambda^2-x)$.

1° $x\ne 0,1$ $\Rightarrow$ A 有 3 个不同特征值 $1,+\sqrt{x},-\sqrt{x}$. $\Rightarrow$ 可对角化

2° $x=0$ $\Rightarrow$ $\left.\begin{array}{l} A \text{ 有 2 个不同特征值 } 0,1 \text{ 重数为 } 2,1. \\ 0 \text{ 的几何重数 } = 3-\mathrm{rank}(0\cdot I-A)=1 \end{array}\right\}$

$\Rightarrow$ 不可对角化

3° $x=1$ $\Rightarrow$ A 有 2 个不同特征值 $1,-1$ 重数为 $2,1$.

1 的几何重数 $=3-\mathrm{rank}(I-A)=\begin{cases} 2 & y=1 \\ 1 & y\ne 1 \end{cases}$

$\Rightarrow A \begin{cases} \text{可对角化，若 } y=1 \\ \text{不可对角化，若 } y\ne 1. \end{cases}$

综上，A 可对角化 $\Leftrightarrow$ $x\ne 0,1$ 或 $\begin{cases} x=1 \\ y=1 \end{cases}$.

注：哈密尔顿-凯莱定理：$P_A(A)=0$. 特别地任意矩阵，总存在零化多项式. 称次数最小且首系数为 1 的零化多项式为 A 的极小多项式 $\leftarrow$ 为相似不变量！ (Cayley-Hamilton)

一般地，A 可对角化 $\Leftrightarrow$ A 的极小多项式无重根. 例 $A^2=A$
$A^2=I$
$A^3=A$ ..

注：该对角矩阵在不记对角元的位置意义下唯一.